

государственное бюджетное общеобразовательное учреждение
Самарской области средняя общеобразовательная школа № 3
имени З.А. Космодемьянской города Новокуйбышевска
городского округа Новокуйбышевск Самарской области

Рассмотрено
на заседании ШМО
Протокол №1
от «31» августа 2020г.
Руководитель ШМО
dr Т.Ю.Муравлёва

Проверено
на заседании МС
протокол № 1
от «31» 08 2020 г.
Руководитель МС
Т.В. Амосова

УТВЕРЖДЕНО
Приказ № 139
«01» 09 2020 г.
Директор ГБОУ СОШ №3
г. Новокуйбышевска
И.В.А. Т.А. Иванушкина



Рабочая программа

элективного курса

«Избранные методы решения задач по геометрии»

г Новокуйбышевск,
2020

Пояснительная записка.

Общеизвестно, что геометрическая линия является одной из центральных линий курса математики. Она предполагает систематическое изучение свойств геометрических фигур на плоскости, формирование пространственных представлений, развитие логического мышления и подготовку аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин (физики, черчения и т.д.) и курса стереометрии. С другой стороны, необходимость усиления геометрической линии обуславливается следующей проблемой: задания частей В и С единого государственного экзамена предполагает решение геометрических задач. Итоги экзамена показали, что учащиеся плохо справлялись с этими заданиями или вообще не приступали к ним. Для успешного выполнения этих заданий необходимы прочные знания основных геометрических фактов и опыт в решении геометрических задач.

Цели курса

- обобщить и систематизировать знания учащихся по основным разделам планиметрии;
- познакомить учащихся с некоторыми методами и приемами решения планиметрических задач;
- сформировать умения применять полученные знания при решении «нетипичных», нестандартных задач.

Задачи курса

- дополнить знания учащихся теоремами прикладного характера, областью применения которых являются задачи;
- расширить и углубить представления учащихся о приёмах и методах решения планиметрических задач;
- помочь овладеть рядом технических и интеллектуальных умений на уровне свободного их использования;
- развить интерес и положительную мотивацию изучения геометрии.

В результате изучения курса учащиеся должны **уметь**:

- точно и грамотно формулировать теоретические положения и излагать собственные рассуждения в ходе решения заданий;
- уверенно решать задачи на вычисление, доказательство и построение;
- применять аппарат алгебры и тригонометрии к решению геометрических задач;
- применять свойства геометрических преобразований к решению задач.

Учебно-методический комплект содержит набор заданий разного уровня, предназначенных, как для индивидуальной, так и для групповой работы.

Текущий контроль уровня достижений осуществляется по результатам выполнения работ, предлагаемых учителем.

Исходя из того, что данный элективный курс в практическом отношении направлен на подготовку к ЕГЭ по математике, то форму оценки уровня достижений целесообразно проводить в виде тестов в формате ЕГЭ.

В данном курсе не предусматривается проверка знания учащимися теоретического материала, главное – научиться решать задачи.

В организации процесса обучения в рамках рассматриваемого курса используются две взаимосвязанные и взаимодополняющие формы: урочная и внеурочная (домашние практические самостоятельные работы).

Изучение материала опирается на использование следующих **методов**:

1. Методы объяснительно-иллюстрированного обучения:

- лекции
- семинары
- рассказ
- беседа
- самостоятельная работа над учебным материалом

2. Методы репродуктивного обучения:

- упражнения
- практикум

3. Методы проблемно-поискового обучения:

- проблемное обучение
- частично-поисковый
- исследовательский
- мозговой штурм

4. Коммуникативные методы обучения:

- дискуссия
- диалог

5. Иммитационно-ролевые методы обучения:

- организационно-мыслительные игры
- анализ конкретной ситуации

Форма проведения занятий лекционно-семинарская. Школьники должны иметь возможность вести чёткий конспект для использования при выполнении домашних и тренировочных контрольных работ.

Программа курса рассчитана на 17 часов и предназначена для учащихся 10-11 классов.

Содержание программы курса

Тема 1.Треугольники (2 часа).

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Свойства проекций катетов
Метрические соотношения в произвольном треугольнике. Свойства медиан, биссектрис, высот. Теоремы о площадях треугольника. Признаки подобия треугольников и применение их к решению задач. Понятие об аффинных свойствах фигур. Теоремы Фалеса, Чевы, Менелая.

Тема 2. Четырехугольники (3 часа).

Метрические соотношения в четырехугольниках. Свойство произвольного четырехугольника, связанное с параллелограммом. Теоремы о площадях четырехугольников. Свойство биссектрисы параллелограмма и трапеции. Свойства трапеции.

Тема 3. Окружности (3 часа).

Метрические соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих. Свойства дуг и хорд. Свойства вписанных углов. Углы между хордами, касательными и секущими.

Тема 4.Окружности и треугольники (3 часа).

Окружности, вписанные и описанные около треугольников. Окружности, вписанные и описанные около прямоугольных треугольников.

Тема 5. Окружности и четырехугольники (3 часа).

Четырехугольники, вписанные и описанные около окружности. Площади четырехугольников, вписанных и описанных около окружностей. Теорема Птолемея.

Тема 6. Избранные методы и приемы (3 часа).

Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем курса	Количество часов	Технология реализации
1-2	Треугольники	2 ч.	Лекция, тестирование
3-5	Четырехугольники	3 ч.	Беседа, практикум
6-8	Окружности	3 ч.	Практикум, промежуточный контроль знаний, самостоятельная работа над учебным материалом.
9-11	Окружности и треугольники	3 ч.	Семинар, практикум
12-14	Окружности и четырехугольники	3 ч.	Практикум, дискуссия
15-16	Избранные методы и приемы	2 ч.	Семинар, практикум
17	Итоговая работа	1 ч.	Организационно-мыслительная игра.

Содержание занятий

Тема I. Треугольники (2 часа)

1. Занятие № 1

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Свойства проекций катетов. Метрические соотношения в произвольном треугольнике. Свойства медиан, биссектрис, высот.

1.1. Ключевые задачи и теоремы

a, b – катеты $\triangle ABC$

c – гипотенуза

h – высота, опущенная на гипотенузу

a_c и b_c – проекции катетов на гипотенузу

$$a^2 = a_c c, \quad h = ab/c$$

$$b^2 = b_c c, \quad h^2 = a_c b_c$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Свойства медиан:

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины. $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}, \quad m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2},$

$$m_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$

2. В прямоугольном треугольнике длина медианы, выходящей из вершины прямого угла, равно половине длины гипотенузы.

Свойства биссектрис:

1. Биссектриса треугольника пересекается в одной точке (точка пересечения биссектрисы – центр вписанной окружности).
2. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные сторонам треугольника.
3. Точки, лежащие на биссектрисе угла равноудалены от его сторон b_a и b_c – отрезки, на которые делится биссектриса $l_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}$, где p – полупериметр.

Свойства высот:

1. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.
2. Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a , h_b , h_c и радиусы r вписанной окружности выражаются формулой:
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

1.2. Задачи

1. Биссектриса угла треугольника равно 6. Длина двух сторон, образующих этот угол, равна 5 и 20. Найти длину третьей стороны. (Ответ: 20)
2. Высоты треугольника равны 12, 15, 20. Найти площадь треугольника. (Ответ: 150)
3. Медианы треугольника равны 5,5 и 6. Найти площадь треугольника. (Ответ: 6)
4. В равнобедренном треугольнике с основанием 24 и боковой стороной 48 проведены биссектрисы углов при основании. Найдите расстояние между точками пересечения этих биссектрис с боковыми сторонами. (Ответ: 16)
5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BE и CH пересекаются в точке K, причем BH = 6, KH = 3. Найти площадь треугольника CBK. (Ответ: 15)
6. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит ее на отрезки 24 и 54. Найти катеты. (Ответ: $18\sqrt{3}$ и $12\sqrt{3}$)

2. Занятие № 2

Теоремы о площадях треугольника, признаки подобия треугольника и применение их к решению задач.

2.1. Ключевые задачи, теоремы

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p - \text{ полупериметр}$$

$$S = pr, \text{ где } r - \text{ радиус вписанной окружности}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \text{ где } R - \text{ радиус описанной окружности}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Медина делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Теорема 1.

Пусть M – произвольная точка AC , тогда $S_{ABM} : S_{BMC} = AM : MC$

Теорема 2.

Площади треугольника ABC и ADC относятся как высоты, проведенные к основанию AC .

2.2. Задачи

1. Внутри треугольника ABC выбрана точка M так, что площади треугольников AMB , BMC , AMC равны. Докажите, что M – точка пересечения медиан.
2. В треугольнике ABC из точки E стороны BC проведена прямая, параллельная высоте BD , которая пересекает сторону AC в точке F . Отрезок EF делит треугольник ABC на две равновеликие части. Найдите длину отрезка EF , если $BD = 6$, $AD : DC = 2 : 7$.
3. В треугольнике ABC точки K и N – середины сторон AB и AC соответственно. Через точку B проведена прямая, которая пересекает AC в точке F , а KN – в точке L так, что $KL : LN = 3 : 2$. Определите площадь четырехугольника $AKLF$, если площадь треугольника ABC равна 40.
4. В прямоугольнике $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 3 : 4$, а точка M делит сторону CD в соотношении $DM : MC = 5 : 3$. В каком отношении KM делит площадь прямоугольника?
5. В треугольнике ABC на медиане BM взята точка K так, что $BK : KM = 1 : 2$. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC .
6. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, площади которых 6 и 54. Найдите гипотенузу.
7. Высота остроугольного треугольника равна 4. Она делит основание на две части, относящиеся как 1 : 8. Найти длину отрезка, параллельного высоте и делящего треугольник на две равновеликие части.
8. В прямоугольном треугольнике катеты относятся, как 3 : 4, а высота, проведенная к гипотенузе, делит площадь треугольника на части, разность которых равна 84 см^2 . Найти площадь всего треугольника.
9. Площадь трапеции $ABCD = 240$. Диагонали пересекаются в точке O , отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.
10. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиа CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF .
11. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AN . Найти угол MBC .

12. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC=1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

Тема II. Четырехугольники (3 часа)

3. Занятия № 3, 4, 5

Метрические соотношения в четырехугольниках. Свойство произвольного четырехугольника, связанное с параллелограммом. Теорема о площадях четырехугольников. Свойство биссектрисы параллелограмма и трапеции. Свойство трапеции.

Ключевые теоремы

1. Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равно половине площади данного четырехугольника.
2. Биссектриса параллелограмма и трапеции делит сторону на два отрезка, один из которых равен стороне угла.
3. В равнобедренной трапеции диагонали равны, углы при основании равны.
4. В параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов его диагоналей.
5. Если четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника, то $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

$$S_{\text{пар}} = ah$$

$$S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$$

$$S_p = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$S_{\text{пар}} = \frac{a+b}{2} h$$

3.2. Задачи

1. В треугольнике ABC на медиане BM взята точка K так, что $BK : KM = 1 : 2$. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.
2. В прямоугольнике ABCD точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 3 : 4$, а точка M делит сторону CD в соотношении $DM : MC = 5 : 3$. В каком отношении KM делит площадь прямоугольника?
3. В равностороннем треугольнике ABC, площадь которого равна S, отложены от вершины B на сторонах BA и BC отрезки $BM = BN = \frac{1}{3} AB$. Точки M и N соединены с точками A и C. Отрезки AN и CM пересекаются в точке D. Найдите площадь четырехугольника MBND.
4. Четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника.

Наименьшие площади трех из них равны 10, 20 и 30. Найти площадь данного четырехугольника.

5. Площадь трапеции равна, основания относятся как 1 : 2. Найти площади треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.
6. В трапеции ABCD ($AB \parallel CD$) O – точка пересечения диагоналей AC и BD. Площади треугольников ABO и CDO равны соответственно 10 и 40. Найти площадь трапеции.

Тема III. Окружности (3 часа)

4. Занятия № 6, 7, 8

4.1. Ключевые задачи, теоремы, формулы:

Теорема: Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Свойства:

1. Углы, опирающиеся на одну дугу, равны.
2. Углы, опирающиеся на диаметр, равны 90° .
3. Угол между секущими, проведенными к окружности из одной точки, равен половине разности дуг, заключенных внутри угла.
4. Угол между касательной и хордой, проведенных из одной точки, равен половине дуги, расположенной внутри угла.
5. Угол между хордами равен полусумме дуг, заключенных между ними.
6. Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.
7. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.
8. AB – касательная к окружности,
AD – секущая, где C и D – точки пересечения с окружностью,
 $AB^2 = AC \cdot AD$.
9. AC и AD – секущие, пересекающие окружность соответственно в точках B, C и K, D.
 $AB \cdot AC = AK \cdot AD$.

4.2 Задачи:

1. Окружность, построенная на стороне параллелограмма как на диаметре, проходит через середину соседней стороны и точку пересечения диагоналей. Найти углы параллелограмма.

2. Треугольник ABC – равнобедренный ($AB = BC$). BD – медиана. Вокруг треугольника ABD описана окружность радиуса 4. Эта окружность пересекает сторону BC в точке E . $BE : EC = 7 : 1$. Найдите периметр треугольника ABC .
3. Из точки вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что угол между касательными равен 60° .
4. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а прямые AB и CD – в точке N . Угол $AMD = 108^\circ$, угол $AND = 24^\circ$. найдите угол ABC и угол BDC , если около $ABCD$ можно описать окружность.
5. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность, и его медиана AD продлена до пересечения с окружностью в точке E . $AD = 27$ см, $DE = 16 \frac{1}{3}$ см. Определить стороны треугольника.
6. AC и BD – диагонали ромба $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает большую диагональ AC в точке E . Определить диагонали ромба, если $AB = 20$ см, $CE = 7$ см.
7. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC с ортоцентром H продлены до пересечения с описанной окружностью в точке D_1 и E_1 . $AH = HD_1$, $BH = HE_1$. Найдите углы треугольника ABC .
8. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AC и BC лежат внутри окружности, продолжение AC пересекает окружность в точке D , а продолжение BC – в точке E . Найдите радиус окружности, если $AB = AC = CD = 2$ и $CE = \sqrt{2}$.
9. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в её середине, проходит через A , а отрезки AB и AC пересекает в точках D и E соответственно. Найдите угол BAC , если $BC = 12$, $AD = 3,5$, $EC = 9/\sqrt{5}$.
10. Боковая сторона равнобедренного треугольника является диаметром окружности, которая отсекает от второй боковой стороны отрезок, равный $36/7$, а от основания отрезок, равный 6 (отрезки расположены вне окружности). Определите медиану, проведенную к боковой стороне треугольника.
11. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внешним образом в точке A . Через точку B , взятую на большей окружности, проведена касательная BC к меньшей окружности. Найдите длину отрезка BC , если хорда $AB = a$.
12. На одной из сторон прямого угла выбрали две точки: одну на расстоянии 6, а другую – 24 от вершины. Проведена окружность, проходящая через выбранные точки и касающаяся другой стороны угла. Найдите расстояние от вершины угла до точки касания.
13. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{17}$ имеют общую хорду AB , длина которой равна 2. Через точку B проведен диаметр BM большей окружности, причем прямая BM вторично пересекает меньшую окружность в точке C . Найдите площадь треугольника ACM .

14. Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках А и В. Найти расстояние между центрами, если АВ=16.

Тема IV. Окружности и треугольники (3 часа)

Занятия № 9, 10, 11

5.1. Ключевые теоремы, задачи, формулы.

1. В любой треугольник можно вписать окружность. Центр – точка пересечения биссектрис.
2. Около любого треугольника можно описать окружность. Центр – точка пересечения серединных перпендикуляров.

$$R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}, \text{ где } R - \text{ радиус описанной окружности}$$

$$r = 2S / a+b+c, \text{ где } r - \text{ радиус вписанной окружности}$$

В правильном треугольнике

$$r = a / 2\sqrt{3}$$

$$R = a / \sqrt{3}$$

В прямоугольном треугольнике

$$r = a+b+c / 2$$

$$R = c / 2$$

Ключевая задача:

Пусть М, N, Р – точки касания вписанной окружности со сторонами АВ, ВС, АС, тогда АМ=р-а, ВN=р-б, СР=р-с, где р-полупериметр; ВС=а, АС=б, АВ=с.

5.2. Задачи:

1. В треугольнике АВС с периметром 2р длина стороны АС равна а, $\angle ABC = \alpha$. Вписанная в треугольник окружность с центром О касается ВС в точке К. Найдите площадь треугольника ВОК.
3. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности?
4. На основании АС равнобедренного треугольника АВС расположена точка D, при этом AD = а, DC = b. Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются BD в точках М и N соответственно. Найдите MN.
5. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найти стороны треугольника, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на расстояние $\sqrt{8}$.
6. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

7. В треугольник с периметром, равным 20, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найдите основание треугольника.
8. В равнобедренный треугольник с основанием 12 вписана окружность, а к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.
9. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O - центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BDC.
10. В треугольник ABC вписан в окружность с радиусом 12. Известно, что $AB = 6$, $BC = 4$. Найти AC.
11. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол $\angle AOC = 60^\circ$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найти угол AMC.

Тема V. Окружности и четырехугольники (3 часа)

6. Занятие № 12, 13, 14

6.1. Ключевые теоремы, задачи, формулы.

1. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.
2. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.
3. Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим её оснований $h = \sqrt{ab}$. $S = \frac{1}{2}pr$.

6.2. Задачи:

1. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.
2. В трапеции ABCD известны боковые стороны $AB = 27$, $CD = 28$ и верхнее основание $BC = 5$. Известно, что $\cos \angle BCD = -2/7$. Найдите AC.
3. В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Серединные перпендикуляры к трем сторонам этого четырехугольника проходят через одну точку. Известно, что три стороны четырехугольника равны 2,3,4. Найдите четвертую сторону четырехугольника.

4. В некоторый угол вписана окружность радиуса 6, длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8. Параллельно хорде проведены две касательные к окружности, в результате чего получилась трапеция. Найти её площадь.
5. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины А и В прямоугольника ABCD. Длина касательной, проведенной из точки С к окружности, равна 3, АВ=12. Найти ВС.
6. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Точки М и N – середины дуг AC и BC. Точка F – середина дуги АВ, не содержащую точку С. Найти площадь FAMN, если катеты AC=5, BC=12.
7. Окружность радиуса 12 проходит через вершины А и В квадрата ABCD. Длина касательной, проведенной к окружности из вершины С, равна 2. Чему равен диаметр окружности, если сторона квадрата равна 1.
8. В трапеции ABCD длина боковой стороны АВ=4, биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке Е. В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке О, касающаяся сторон АВ в точке М, BE в точке N. Найти угол MON, если MN=2.
9. Окружность радиуса 1,5 проходит через вершины М и D трапеции MNPД (MD || NP, MD больше NP), пересекает сторону PD в точке К так, что $PD=4\sqrt{3}KD$, угол NDM=60°. Найдите площадь трапеции MNPД.
10. Окружность радиуса 12 вписана в равнобедренную трапецию. Точка касания окружности с боковой стороной трапеции делит эту сторону в соотношении 1:1. Найти периметр.

Тема VI. Избранные методы и приемы (2 часа)

7. Занятия № 15, 16.

7.1. Ключевые теоремы, задачи, формулы.

1. «Удлинение» медианы

Дополнительное построение – один из наиболее эффективных приемов решения геометрических задач. Однако такие построения чаще всего связаны с серьезными трудностями. Хорошо, если условие задачи подсказывает, как дополнить чертеж. Во многих задачах, связанных с медианой, ее «удвоение» или «удлинение» на треть приносит результат.

2. Метод вспомогательной площади

Ключом к решению многих задач становится работа с понятием, на которое в условии не дано намёка. Нередко такой вспомогательной величиной служит площадь.

Ключевая задача:

В треугольник ABC вписаны две касающиеся друг друга окружности так, что одна касается сторон АВ и AC, а другая – АВ и BC. Доказать, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса окружности, вписанной в данный треугольник.

3. Метод вспомогательной окружности

По-видимому, вспомогательная окружность – одно из наиболее эстетичных дополнительных построений. Скорее всего, это связано с тем, что «увидеть» окружность там, где ее нет, уже само по себе нетривиально. Однако мы надеемся, что после изучения настоящего параграфа у читателя будут чаще возникать «круги перед глазами».

Ключевые задачи:

1. Если в четырехугольник сумма противоположных углов равна 180° , то вокруг него можно описать окружность.
2. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, AA_1 и CC_1 – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Докажите, что $OA_1 = OC_1$.
3. Если точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD , причем $\angle ABD = \angle ACD$, то точки A, B, C и D принадлежат одной окружности. Доказать.

7.2. Задачи:

1. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) M и N – середины оснований BC и AD . $AC = \sqrt{15}$, $BD = 1$, $MN = 2$. Найти площадь трапеции.
2. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной равной 4, проведена медиана боковой стороны, равная 3. Найти основание треугольника.
3. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана боковой стороны 5. Найти длины боковых сторон.
4. В треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найти длину AM .
5. В треугольнике ABC медиана BM перпендикулярна стороне BC . $AB : BC = 2 : 1$. Найти $\angle ABC$.
6. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите наименьшую высоту.
7. В треугольнике длины двух сторон равны 6 и 3. Найдите длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.
8. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 17 и 39, а расстояние между центрами 44. Определите длину общей хорды.

Занятие 17. Итоговая работа (1 час).

Аукцион решения одной задачи. Задачи для аукциона (С-4 ЕГЭ).

1. Свой метод может показать любой ученик класса.
2. Решение задачи может быть написано на листке. (Возможно устное решение).
3. После защиты решения ученику можно задавать вопросы, указывать на ошибки.
4. Если автор решения не смог восполнить выявленный пробел, а это сделал другой ученик, то он признается автором.

5. Победителем аукциона признается тот ученик, который представил последним свой метод решения.
6. Задачи для аукциона.
- Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.
 - Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB=6$ и $BC=4$. Найдите AC
 - Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH=AB$. Найдите угол ACB
 - В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN=12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC
 - Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60 градусов. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC

Список практических (домашних самостоятельных работ).

1. Решение треугольников.

- В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащих этим углам, соответственно равны 12 и 8. Найдите косинус угла C, увеличенный в 4 раза
- Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $CK=5$, $CH=1$
- В прямоугольном треугольнике длины двух медиан, проведенных к катетам, равны 12 и $4\sqrt{11}$. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.
- В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Найдите сторону AB этого треугольника, если $AC=30$ и $BC=12\sqrt{5}$

2. Решение четырехугольников.

- В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20, 40, 60. Найдите градусную меру угла BAO, если известно, что $AB=15$, $AO=8$
- В параллелограмме ABCD биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K и прямую DC в точке L. Найдите периметр треугольника ABK, если $AD=10$, $KL=7,5$, $CL=6$
- В параллелограмме ABCD биссектрисы углов B и C пересекаются в точке L, лежащей на стороне AD. Найдите периметр параллелограмма ABCD, если известно, что $CL=12$, а площадь треугольника ABL равна 15
- Найдите длину средней линии трапеции, в которой диагонали взаимно перпендикулярны, а их длины равны 10 и 24

3. Вписанная и описанная окружность

- В трапецию ABCD с прямым углом BAD вписана окружность радиусом 5. Найдите среднюю линию трапеции, если угол между ней и боковой стороной CD трапеции равен 30 градусов
- Около треугольника BCD описана окружность. Через точку B к окружности проведена касательная, пересекающая прямую CD в точке A так, что D лежит на отрезке AC. Найдите длину AD, если $CD=5$ и $AB=6$
- Равнобедренная трапеция описана около окружности радиусом 2. Найдите площадь трапеции, если косинус угла при большем основании трапеции равен 0,6
- Около треугольника ABC описана окружность радиусом $4\sqrt{3}$, и в него же вписана окружность. Хорда описанной окружности, проходящая через центр вписанной окружности и вершину A, пересекает сторону BC в точке M. Найдите MC, если угол $A=60^\circ$ и $AB=2AC$

Литература

1. И.Ф.Шарыгин. Геометрия (Текст): задачник / И.Ф.Шарыгин .- М.: Дрофа, 1996.
2. М.И.Сканави. Сборник задач по геометрии.
3. Математика (подготовка к ЕГЭ). Ф.Ф.Лысенко.
4. Типовые тестовые задания (ЕГЭ). А.Л.Семенова, И.В.Яценко. Издательство «Экзамен», Москва 2010.
5. Математика. Сборник тестов по плану ЕГЭ. А.Г.Клово.
6. Тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ. СИПКРО 2010.
7. ЕГЭ – 2010. Математика. ФИПИ.
8. В.А.Кокотушкин, Н.Г.Панфилов. 200 задач по геометрии для поступающих в ВУЗы.- М: «Уникум-Центр», «Поматур» 2000.-96с.:ил.
9. В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии (Текст) в 2 ч./ В.В.Прасолов. - М.:Наука, 1986.