государственное бюджетное общеобразовательное учреждение Самарской области средняя общеобразовательная школа № 3 имени З.А. Космодемьянской города Новокуйбышевска городского округа Новокуйбышевск Самарской области

Рассмотрено на заседании ШМО учителей естественнонаучного цикла Протокол №1 от « 28 » августа 2020 г. Руководитель ШМО ____________ Т.Ю.Муравлёва	«Проверено» «31» августа 2020 г. Зам. директора по УВР__________Т.В. Амосова	УТВЕРЖДЕНО Приказ № 139 « 01 » 09 2020 г. Директор ГБОУ СОШ №3 г. Новокуйбышевска __________Т.А. Иванушкина

Рабочая программа
элективного курса
«Решение уравнений в целых числах»

г Новокуйбышевск
2020

Пояснительная записка.

Для обучающихся 9-10 классов была проведена анкета по выявлению трудностей при изучении алгебры. С результатами анкеты были ознакомлены их родители. 82% опрошенных посчитали для себя необходимым изучить способы и методы решения уравнений и задач в целых числах. Способов решения таких уравнений и задач несколько, и я считаю, что выпускник средней школы должен владеть значительным их количеством. Актуальность курса состоит в том, что в данной программе объединены все материалы о методах и способах решения нестандартных задач (включая задачи межпредметного характера) и уравнений от нескольких переменных на уровне, превышающем уровень государственных образовательных стандартов.

Предлагаемый курс рассчитан в первую очередь на школьников 10 - 11 классов, обучающихся по естественно-математическому, экономическому и общеобразовательному профилю, который включает 6 часов математики в неделю, и рассчитан на 17 учебных часов.

Тип элективного курса: углубление отдельных тем обязательных предметов федерального компонента и обязательных предметов по выбору

Цель курса: сформировать практические навыки решения нестандартных задач, сводящиеся к решению уравнений в целых числах.

Планируемые образовательные результаты учащихся:

- Применяют признаки и свойства делимости для нахождения необходимого и достаточного условия задачи, для доказательсвта высказывания.
- Используют определения простого и составного числа и основную теорему арифметики для нахождения канонического представления любого числа.

- Воспроизводят основные свойства наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного целых чисел.
- Применяют теорему о делении с остатком при решении задач.
- Применяют алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя.
- Демонстрируют знания методов решения простейших уравнений и некоторых нелинейных неопределенных уравнений (разложение на множители, перебора, спуска, испытания остатков) и применяют их на практике при решении уравнений.
- Владеют понятием «пифагоровы тройки», находят целочисленные решения уравнений (вида $x^n+y^n=z^n$), применяя особенность пифагоровых троек.
- Решают задачи и уравнения, в том числе нестандартные и геометрические задачи, задачи межпредметного характера в целых числах, выбирая более рациональный способ.
- Демонстрируют навыки творческой переработки известных алгоритмов для решения задач с изменившимися условиями.

Способы оценки планируемых результатов.

Поскольку основой работы учащихся являются практические задании, то оценка планируемых результатов будет накопительной (по всем заданиям) с одной стороны и дифференцированной (по каждому ученику и по каждому отрабатываемому умению) с другой.

Для оценки результатов используется рейтинговая система (0-5 баллов) со следующими критериями:

0 балл – полное отсутствие умения;

1 балл – есть некоторое понимание, но полное неумение применять на практике;

2 балла – есть понимание, но неправильное применение на практике;

3 балла – правильное применение навыка в большинстве случаев;

4 балла - правильное применение навыка во всех заданиях (умение модифицировать и комбинировать с другими умениями с подсказкой учителя;

5 баллов – творческое использование (умение модифицировать и комбинировать с другими умениями самостоятельно).

При проведении промежуточной аттестации в письменной форме отметка за работу выставляется учителем по пятибалльной системе в соответствии с нормами оценок письменных работ обучающихся по соответствующим учебным предметам.

Курс может быть оценен положительно, если ученик выполнил промежуточные тесты и зачетную работу, предусмотренную программой курса (подготовил проект).

Основания для отбора содержания образования.

Так как вопрос о нахождении целых (натуральных) решений линейного уравнения с двумя переменными, о возможных методах его решения остается за рамками школьного учебника, я решила в данном курсе осветить эти вопросы, усилив практическую направленность преподавания.

В данный курс я включила «Введение» и два раздела:

“Теория делимости на множестве целых чисел ” и “Методы решения уравнений в целых числах”.

В каждом разделе содержится теоретический материал и материал прикладного характера и три теста для самостоятельной работы. Некоторые темы, включенные в программу элективного курса, совпадают с темами, представленными в примерных программах по математике, однако содержание материала значительно отличается от базового курса. Предусмотрено выполнение трёх тестов, уровень выполнения тестов выбирают сами учащиеся. Я убеждена, что именно такое распределение материала будет наиболее эффективным для изучения курса обучающимися.

Для достижения цели курса я предполагаю использование различных форм организации занятий. Во время лекций излагается теоретический материал, при этом преимущественно используется информационно-иллюстративный метод, когда обучающимся разными средствами сообщается готовая информация, а они ее воспринимают, осознают и фиксируют в памяти, и элементы метода проблемного обучения. При этом, прежде чем излагать материал, перед обучающимися ставится проблема, формулируется познавательная задача, а затем, раскрывается система доказательств, сравнивая точки зрения, различные подходы, показывается способ решения поставленной задачи. В качестве содокладчиков могут выступать обучающиеся. В этом случае они воспроизводят отдельные элементы содержания курса, демонстрируют понимание основных законов и принципов.

Большое внимание я уделяю самостоятельной работе учащихся при решении задач, подготовке докладов и презентаций. В ходе самостоятельной работы ученики сами осознают характер выполняемой работы, сами определяют и находят способы преодоления возникающих трудностей, в целом сами организуют свою деятельность, что способствует достижению цели курса. Моя роль (роль учителя) во время практических занятий сводится только к консультированию учащихся. В ходе занятий обучающиеся выполняют индивидуальные контрольные задания, а по окончанию занятий курса проект, тема которого определяется каждым обучающимся индивидуально. Список тем может быть сообщен заранее, чтобы обучающиеся могли воспользоваться правом выбора темы или даже сумели предложить свои собственные «свободные» темы. Работа над выбранной темой может быть сугубо индивидуальной, но не исключается выполнение проекта небольшой группой учеников.

Обсуждение результатов выполнения проекта я предполагаю проводить во время публичной защиты, куда могут быть приглашены и не изучавшие данный курс учащиеся.

При обсуждении результатов проекта считаю нужным обратить внимание на то, какие задачи (проблемы) ставили перед собой группа или отдельный ученик и решены ли они полностью или частично, каков был вклад каждого участника в работу группы (что он сделал); какого качества материалы, подготовленные группой или учеником. Лучшие работы будут рекомендованы для участия в научно – исследовательских конференциях различного уровня.

На практикумах наряду с обучающей самостоятельной работой используется парная, групповая или часы, выделяемые на практическую деятельность, независимо от того, где и каким образом эта практическая деятельность организована.

Характеристика ресурсов

Образовательные ресурсы:

Информационные:

1. Г.И.Вольфсон и др. ЕГЭ 2014. Математика.Задача С6./ под. Ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко.-М.: МЦНМО, 2014
2. А.О.Гельфонд Решение уравнений в целых числах. – 4-е изд. М.: Наука, 2009г.
3. В. А. Далингер Задачи в целых числа. - М.: «Просвещение», 2013г.
4. Квант, физико-математический журнал для школьников и студентов. Материалы вступительных экзаменов в МГУ, МФТИ и другие вузы
5. Г. Фалин, А. Фалин Линейные диофантовы уравнения.- МГУ, 2012г
6. А. В. Фарков Методы решения олимпийских задач. 10-11 классы. Серия: «Математика. Элективный курс».- Илекса.2011

Интернет-ресурсы:

1. Mathschool.ru 2012-2015
2. Mathus.ruю Подготовка к олимпиадам и ЕГЭ по математике
3. Синг, С. Великая теорема Ферма [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://evrika.tsi.lv/index.php?name=texts&file=show&f=211#note2 - Загл. с экрана.

Материальные ресурсы:

- Доступ к сети Интернет.
- ПК.
- Кабинет медиатеки.

Организационные ресурсы:

- Рекомендуется проводить занятия по расписанию через час после окончания основных уроков у обучающихся.

Тематическое планирование.

Программа курса включает в себя следующие разделы:

1. Введение-(1 час). История развития решения уравнений в целых числах: от Диофанта до доказательства теоремы Ферма

2. Теория делимости на множестве целых чисел – (5 часов). Признаки и свойства делимости на множестве целых чисел. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики – (2 часа). Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел- (1 час). Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида. Проведение тестирования- (2 часа).

3. Методы решения уравнений в целых числах - (11 часов). Различные методы решения простейших диофантовых уравнений первой степени с двумя переменными- (2 часа). Пифагоровы тройки и их свойства. Проведение тестирования – (2часа). Методы решения некоторых нелинейных неопределенных уравнений – (4 часа). Решение математических задач и задач межпредметного характера, сводящихся к решению уравнений в целых числах. Проведение тестирования –(3 часа).

Учебно-тематическое планирование

Тема	Количество часов				Формы контроля
	всего	аудиторных	Внеаудиторных	Практичекая	
Введение. История развития решения уравнений в целых числах: от Диофанта до доказательства теоремы Ферма	1	1			
Теория делимости на множестве целых чисел.					
Признаки и свойства делимости на множестве целых чисел. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики.	2	1	1	1	Самостоятельное решение задач
Наибольший общий делитель и наименьшее общее	1	1		1	Решение

кратное целых чисел					
Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида. Проведение тестирования.	2	1	1	2	Тестиро-вание
Методы решения уравнений в целых числах					
Различные методы решения простейших диофантовых уравнений первой степени с двумя переменными.	2	0,5	1,5	2	Самостоятельное решение задач
Пифагоровы тройки и их свойства. Проведение тестирования.	2	0,5	1,5	1	Тестиро-вание
Методы решения некоторых нелинейных неопределенных уравнений	4	1	3	2	Самостоятельное решение задач
Решение математических задач и задач межпредметного характера, сводящихся к решению уравнений в целых числах. Проведение	3		3	2	Тестиро-вание

тестирования.					
Всего	17	6	11	11	

Литература

1. Г.И.Вольфсон и др. ЕГЭ 2014. Математика.Задача С6./ под. Ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко.-М.: МЦНМО, 2014
2. А.О.Гельфонд Решение уравнений в целых числах. – 4-е изд. М.: Наука, 2009г.
3. В. А. Далингер Задачи в целых числа. - М.: «Просвещение», 2013г.
4. Квант, физико-математический журнал для школьников и студентов. Материалы вступительных экзаменов в МГУ, МФТИ и другие вузы
5. Г. Фалин, А. Фалин Линейные диофантовы уравнения.- МГУ, 2012г
6. А. В. Фарков Методы решения олимпийских задач. 10-11 классы. Серия: «Математика. Элективный курс».- Илекса.2011

Образцы учебных материалов

ТЕМА: Признаки и свойства делимости на множестве целых чисел. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики

2.1. Доказать, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ делится на $a - c$.

2.2. Найти необходимое и достаточное условие, того, чтобы сумма чисел a и b делилась бы на c, если a и b на c не делятся.

2.3. Доказать, что если сумма всех делителей некоторого числа вдвое больше этого числа, то сумма чисел, обратных этим делителям, равна 2.

2.4. Найдите каноническое представление числа 60984.

2.5. Докажите, что $p^2 - 1$ кратно 24, если p – простое число, большее 3.

2.6. Найти такие значения A, при которых все три числа A, $A+4$, $A+14$ будут простыми.

2.7. Найти все простые числа p такие, что $p+10$ и $p+14$ тоже являются простыми числами.

2.8. Доказать, что a^4+4 есть составное число при любом натуральном a, больше 1.

2.9. Доказать, что любое простое число можно представить или в виде $4n$-1 либо $4n+1$.

ТЕМА: Наибольший общий делитель целых чисел

3.1. Каким может быть наибольший общий делитель по сравнению с их разностью?

3.2. Доказать, что два последовательных нечетных числа взаимно простые.

3.3. Доказать, что наибольший общий делитель последовательных чётных чисел равен 2.

3.4. Наименьшее общее кратное двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 90, а их наибольший общий делитель равен 6. Найдите эти числа.

3.5. Доказать, что если даны три последовательных натуральных числа, то произведение двух последовательных чисел и третье число либо взаимно простые, либо имеют наибольшим общим делителем число 2.

3.6. Доказать, что если числа a и c взаимно простые, то каждое из этих чисел взаимно простые. Каким может быть наибольший общий делитель по сравнению с их разностью?

ТЕМА: Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида

4.1. Могут ли все натуральные числа a, b, c, d оказаться нечетными, если c – частное отделения a на b, а d – остаток от этого деления?

4.2. Установить, как изменится остаток (при делении с остатком), если делимое и делитель увеличить (или уменьшить) в одно и то же число раз.

4.3. Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть сумма нескольких чисел, то остаток от деления этой суммы на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить одно или несколько слагаемых на число, кратное делителю.

4.4. Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть произведение нескольких чисел, то остаток от деления этого произведения на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить один из множителей на число, кратное делителю.

4.5. Доказать, что при делении большего числа на меньшее делимое всегда больше двойного остатка.

4.6. Какое число можно прибавить к делимому (при делении с остатком), чтобы частое не изменилось?

4.7. Какие числа можно прибавить одновременно к делимому и делителю (при делении с остатком), чтобы частное не изменилось?

4.8. При каком условии деление числа A (с остатком) на два последовательных числа a и $a+1$ дает в частном одно и то же число?

4.9. Найти линейное представление наибольшего общего делителя чисел 1232 и 1672.

ТЕМА: Различные методы решения простейших диофантовых уравнений первой степени с двумя переменными.

5.1. Решите уравнение, составленное в начале параграфа по представленным алгоритмам.

5.2. Решить уравнения в целых числах:

а) $27x - 40y = 1$; б) $54x + 37y = 7$; в) $107x + 84y = 1$;

г) $13x - 15y = 7$; д) $81x + 52y = 5$; е) $24x - 56y = 72$;

ж) $127x - 52y + 1 = 0$; з) $6x + 10y - 7z = 11$.

5.3. На какое наименьшее число надо умножить 7, чтобы произведение оканчивалось на 123.

5.4. Найти все четырёхзначные простые числа, начинающиеся и оканчивающиеся цифрой 1.

5.5. Кусок проволоки длиной 102 см нужно разрезать на части длиной 15 см и 12 см, так чтобы была использована вся проволока. Как это сделать?

ТЕМА: Пифагоровы тройки и их свойства.

6.1. Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?

6.2. Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?

ТЕМА: Методы решения некоторых нелинейных неопределенных уравнений. Решение задач, сводящихся к решению уравнений в целых числах.

7.1. Решить в натуральных числах уравнение $y^2 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$.

7.2. Решить в простых числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$.

7.3. Доказать, что уравнение $x^3 + x + 10y = 20004$ неразрешимо в целых числах.

7.4. Доказать, что уравнение $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 33$ неразрешимо в целых числах.

7.5. Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$.

7.6. Доказать, что уравнения не имеют целочисленных решений:

а) $y^2 = 5x^2 + 6$; б) $x^3 = 2 + 3y^2$

7.7. Решить в целых числах уравнения: а) $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$;

б) $x^2 - y^2 = 91$; в) $2xy = x^2 + 2y$; г) $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$

7.8. Решите в натуральных числах уравнения:

а) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$;   б) $x^2 - 4xy - 5y^2 = 1996$.

7.9. Докажите, что система уравнений не имеет решений в целых числах.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

7.10. Найти все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению

а) $x^2 = y^2 + 2y + 13$; б) $xy = 20 - 3x + y$; в) $xy + 1 = x + y$; г) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$

7.11. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1994 = n^2$

7.12. Найти все простые числа, которые одновременно являются суммой двух простых чисел и разностью двух простых чисел.

7.13. Докажите, что уравнение $x^2 - y^2 = 30$ не имеет решений в целых числах.

7.14. Решите уравнение $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.

7.15. Если первую цифру трехзначного числа увеличить на n, то полученное число будет в n раз больше исходного. Найдите число n и исходное число.

7.16. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

7.17. Решить в целых числах уравнение $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$.

7.18. Решите в натуральных числах систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308, \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + yz = 19 \end{cases}$

7.19. Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 45.

7.20. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению:

а) $x^2 - y^2 = 105$;   б) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$

7.21. Решите в целых числах уравнение:

а) $xy + 3x - 5y = -3$;   б) $x - y = \dfrac{x}{y}$

Образцы проверочных материалов

ТЕМА: Теория делимости на множестве целых чисел

ТЕСТ

<table>
<tr><td>1 вариант</td><td>2 вариант</td><td></td></tr>
<tr><td>1. Найти число, при делении которого на 133827 получается неполное частное 826 и остаток 1124.</td><td>1. найдите неполное частное и остаток при делении числа 1876578 на 756</td><td rowspan="3">Уровень А</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры 97-102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится</td></tr>
<tr><td>Квартира 178?</td><td>Квартира 234?</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков и так поступили несколько раз. Могут ли в результате получиться</td><td rowspan="3">Уровень Б</td></tr>
<tr><td>1973 куска?</td><td>1993 куска?</td></tr>
<tr><td>4. Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть сумма нескольких чисел, то остаток от деления этой суммы на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить одно или несколько слагаемых на число, кратное делителю.</td><td>4.Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть произведение нескольких чисел, то остаток от деления этого произведения на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить один из множителей на число, кратное делителю.</td></tr>
<tr><td>5. Докажите, что число $(222^{555}+555^{222})$ кратно 7.</td><td>5. Найдите остаток от деления числа 2^{2015} от деления на 3.</td><td>Уровень В</td></tr>
</table>

(Уровень выполнения тестов выбирают сами обучающиеся)

ТЕМА: Методы решения уравнений в целых числах

ТЕСТ

1 вариант	2 вариант	
1.Найдите целые решения уравнения 3x+5y=20	1. Найдите целые решения уравнения 7x+3y=64	Уровень А
2.Найдите целые точки (то есть точки, координаты которых – целые числа), лежащие на отрезках с концами:		Уровень Б
(0;0) и (20;28)	(20;20) и (10;5)	
3.Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?	3.Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?	Уровень В

(Уровень выполнения тестов выбирают сами обучающиеся)

ТЕСТ

1 вариант	2 вариант	
1.Решите задачу:		
Мальчик и девочка измеряли одно и то же расстояние в 143 м шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпадали 21 раз.	Процент учеников некоторого класса, повысивших в третьей четверти успеваемость, заключен в пределах от 2,9 % до 3,1%. Определите минимально возможное число	Уровень А

Шаг девочки 55 см. Найдите длину шага мальчика.	учеников в таком классе.	
2.Решить уравнение в натуральных числах:		Уровень Б
$n!+5n+13=к^2$	$1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$	
3.Решить уравнение в целых числах:		
$10x+y=x^2+y^2+13$	$xy+x-3y=-4$	
4. Решите в целых числах уравнение $3^п+8=x^п$	4. Известно, что при любом целом К, не равное 27 число $a-К^3$ делится без остатка на $(27-К)$. Найдите а.	Уровень В

(Уровень выполнения тестов выбирают сами обучающиеся)